ÁLGEBRA LINEAR:
aplicações de sistemas lineares

SANTOS, Cleber de Oliveira dos[1]

RESUMO

Este artigo apresenta algumas aplicações de sistemas lineares, conteúdo estudado na disciplina de Álgebra linear da Faculdade Capivari – FUCAP. As aplicações que estão demonstradas são as seguintes: projeto de padrão de tráfego, balanceamento de equações químicas e circuito elétrico. Os problemas são solucionados através da resolução matricial dos sistemas lineares por meio de operações entre linhas da matriz, permitindo assim, sua resolução.

Palavras- chave: Aplicações. Sistemas lineares. Álgebra linear.

1 INTRODUÇÃO

A importância da matemática no cenário científico é de grande destaque, pois é de suma importância a sua base em diversas áreas do conhecimento (física, química, engenharia, economia, entre outras).

Numa sociedade que vem se tornando cada vez mais tecnológica, o uso da matemática vem se fazendo presente e necessário desde quando as barreiras da informação deram lugar ao livre acesso aos ilimitados conteúdos disponibilizados em diversos meios.

Em particular o uso da Álgebra Linear está ligado a diversas situações, dentre elas: o uso no processamento de dados, na tecnologia da informação, na criação de softwares e questões mais palpáveis, como as taxas de fluxo de um sistema de tráfego, na distribuição de água e energia, no balanceamento de equações químicas em diversos outros segmentos.

Em muitos casos a informação é organizada em linhas e colunas, formando assim o que chamamos de “matrizes”. Essas matrizes aparecem com certa frequência como tabelas de dados numéricos que surgem em observações físicas e também em vários outros contextos matemáticos. Assim, fazendo as operações entre linhas da matriz permitindo a solução do problema.

2 NOÇÃO SOBRE ÁLGEBRA LINEAR

A Álgebra Linear é uma disciplina que trabalha com conceitos bastante concretos, o que faz de seu uso extrema importância nas engenharias. Nos últimos tempos, a sua importância tem crescido muito em diversas áreas que vão desde a matemática básica ao estudo avançado de novas tecnologias.

O campo de aplicação da disciplina é muito vasto, através do crescimento da informática, o uso de cálculo matricial e vetorial tornou-se de grande uso, e isso impulsionou a aplicabilidade em outras áreas, como as engenharias.

Nas engenharias a Álgebra Linear auxilia no desenvolvimento e soluções de

[1] Mestrando em Educação (UNISUL). Docente na Faculdade Capivari (FUCAP).
Contato: cleber_013@hotmail.com

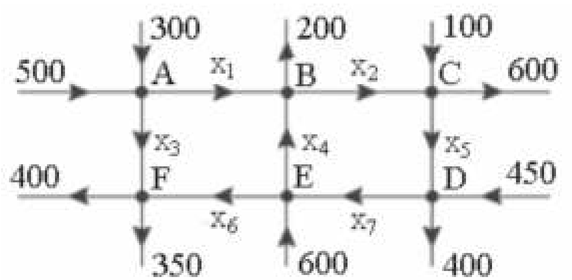
problemas em situações concretas. No artigo, vamos apresentar o uso de sistemas lineares em padrões de tráfego, balanceamento de equações químicas e circuito elétrico.

3 APLICAÇÕES

3.1 PROJETOS DE PADRÃO DE TRÁFEGO

A figura dada mostra uma rede viária de ruas de mão única com fluxo de tráfego nos sentidos indicados. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas pelo número de veículo por hora.

Figura 1 – Fluxo de tráfego



Fonte: Anton e Korres (2012, p. 84, exercício 4)

(a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas.

Resolução:

Para evitar congestionamentos de trânsito, o fluxo para dentro de cada cruzamento deve igualar o fluxo para fora do cruzamento. Assim, temos:

Quadro 1 - Igualdade do Fluxo nos cruzamentos Cruzamento

Cruzamento	Fluxo para dentro = Fluxo para fora
A	$500 + 300 = x_1 + x_3$
B	$x_1 + x_4 = x_2 + 200$
C	$x_2 + 100 = x_5 + 600$
D	$x_5 + 450 = x_7 + 400$
E	$x_7 + 600 = x_4 + x_6$
F	$x_3 + x_6 = 400 + 350$

Fonte: Elaborado pelo autor (2015)

De acordo com a tabela acima, podemos escrever o seguinte sistema linear:

$$
\begin{cases}
x_1 + x_3 = 800 \\
x_1 - x_2 + x_4 = 200 \\
x_2 - x_5 = 500 \\
x_5 - x_7 = -50 \\
x_4 + x_6 - x_7 = 600 \\
x_3 + x_6 = 750
\end{cases}
\qquad (1.1)
$$

b) Resolva o sistema linear (1.1) para encontrar as taxas de fluxo desconhecidas.

Do sistema linear (1.1), podemos escrever a seguinte matriz aumentada:

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 800 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 500 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -50 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 600 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 750
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \to L_{2,3} \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 800 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 500 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -50 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 600 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 750
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \to L_{3,6} \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 800 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 500 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 750 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -50 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 600 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \to L_{4,5} \\ \\ \to L_6 = L_6 - L_1
\end{array}
$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 750 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -50 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -600 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to L_1 = L_1 - L_3 \\ \\ \\ \\ \\ \to L_6 = L_6 + L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 750 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -50 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -100 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \to L_2 = L_2 + L_5 \\ \\ \\ \\ \to L_6 = L_6 + L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 450 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 750 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 650 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \to L_6 = L_6 - L_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 450 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 750 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \to L_6 = L_6 + L_5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 450 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 750 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (1.2)$$

Nesse momento, vamos fazer a seguinte análise de acordo com Boldrini, J. L. *et al* (1980) e, Steinbruch e Winterle (1997).

$P(A) = 5$
$P(A|u) = 5$
$n = 7$

Onde:

P(A): é o posto da matriz dos coeficientes das incógnitas. O posto de uma matriz indica quantas linhas não nulas a matriz possui.
P(A|u): é o posto da matriz aumentada. A matriz aumentada é a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas e os termos independentes do sistema.
n: é o número de incógnitas que o sistema possui.

Veja que: $P(A) = P(A|u) < n$, assim, o sistema é classificado como SPI, admite infinitas soluções. Portanto, vamos determinar o grau de liberdade do sistema, ou seja, descobrir quantas variáveis livres existe.
O grau de liberdade é dado por: $g = n - P(A|u)$. Então, $g = 7 – 5 = 2$. Portanto, temos 2 variáveis livres.
Da matriz (1.2), podemos escrever o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 - x_6 = 50 \\ x_2 - x_7 = 450 \\ x_3 + x_6 = 750 \\ x_4 + x_6 - x_7 = 600 \\ x_5 - x_7 = -50 \end{cases}$$

De fato, temos 2 variáveis livres, assim chamando $x_6 = s$ e $x_7 = t$, temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= 50 + s \\ x_2 &= 450 + t \\ x_3 &= 750 - s \\ x_4 &= 600 - s + t \\ x_5 &= -50 + t \\ x_6 &= s \\ x_7 &= t \end{aligned}$$

Percebemos que o parâmetro s e t não são completamente arbitrários, pois há restrições físicas a considerar. Vemos que s pode assumir qualquer número inteiro que satisfaça $50 \leq s \leq 750$ e t pode assumir qualquer número natural que satisfaça $50 \leq t \leq 150$. Adotando qualquer número dentro dos intervalos a taxa de fluxo média ao longo das ruas ficará dentro das cotas abaixo:

$$100 \leq x_1 \leq 800$$
$$500 \leq x_2 \leq 600$$
$$0 \leq x_3 \leq 700$$
$$0 \leq x_4 \leq 600$$
$$0 \leq x_5 \leq 100$$
$$50 \leq x_6 \leq 750$$
$$50 \leq x_7 \leq 150$$

3.2 EQUILIBRANDO EQUAÇÕES QUÍMICAS

Nota: A equação química é a forma de se descrever uma reação química. Os reagentes são mostrados no lado esquerdo da equação e os produtos no lado direito.
Sugestão: Atribua coeficientes x_i, com i pertencendo ao conjunto dos números naturais excluindo o 0 (zero) às substâncias que aparecem na equação. Como pela Lei de Lavoisier, em uma reação química a soma das massas dos reagentes é igual à soma das massas dos produtos resultantes, então iguale a quantidade de cada elemento químico que aparece no lado esquerdo da equação à quantidade desse mesmo elemento que aparece no lado direito da equação. Esse procedimento, feito para cada elemento químico, resultará em um sistema de equações lineares, onde as incógnitas são os coeficientes estequiométricos x_i da reação química.

Vamos escrever uma equação equilibrada para a reação química abaixo:

$Co_2 + H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$ (fotossíntese)

Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 85, n.12)

Resolução:

Sejam, x_1, x_2, x_3 e x_4 inteiros positivos que equilibram a equação:

$$x_1 . (CO_2) + x_2 . (H_2O) \rightarrow x_3 . (C_6H_{12}O_6) + x_4 . (O_2)$$

Igualando o número de átomo de cada tipo de ambos os lados, temos:

$1x_1 = 6\,x_3$ (C) Carbono
$2x_1 + 1x_2 = 6x_3 + 2x_4$ (O) Oxigênio
$2x_2 = 12x_3$ (H) Hidrogênio

Assim, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} 1x_1 - 6x_3 = 0 \\ 2x_1 + 1x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 12x_3 = 0 \end{cases} \qquad (1.3)$$

Do sistema linear (1.3), podemos escrever a seguinte matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \to L_2 = L_2 - 2L_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \to L_3 = L_3 - 2L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \to \frac{L_3}{-24} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to L_1 = L_1 + 6L_3 \\ \to L_2 = L_2 - 6L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \end{array}\right) \quad (1.4)$$

Nesse momento, vamos fazer a seguinte análise de acordo com Boldrini, J. L. *et al* (1980) e, Steinbruch e Winterle (1997).

P(A) = 3
P(A|u) = 3
n = 4

Assim, g = 4 – 3 = 1. Portanto, temos 1 variável livre.

Da matriz (1.4), podemos escrever o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 1x_1 - 1x_4 = 0 \\ 1x_2 - 1x_4 = 0 \\ 1x_3 - \frac{1}{6}x_4 = 0 \end{cases}$$

De fato, temos 1 variável livre, assim chamando $x_4 = t$, sendo t pertencente ao conjunto dos números naturais, temos:

$$x_1 = t$$
$$x_2 = t$$
$$x_3 = \frac{1}{6}t\ ,$$
$$x_4 = t$$

Portanto, tomamos $t = 6$, de modo que podemos equilibrar a equação tomando $x_1 = 6$, $x_2 = 6$, $x_3 = 1$ e $x_4 = 6$.

Assim, obtemos a seguinte equação equilibrada: $6 . (CO_2) + 6 . (H_2O) \rightarrow 1 . (C_6H_{12}O_6) + 6 . (O_2)$.

3.3 CIRCUITO ELÉTRICO

Primeiramente, vamos apresentar de acordo com ANTON, R.; RORRES, C. (2012) alguns conceitos básicos necessários para a abordagem de problemas sobre circuito elétrico. A teoria de circuito elétrico baseia-se nas Leis de Ohm e Kirchhoff.

(1) Lei de Ohm: A queda de tensão elétrica num condutor percorrido por uma corrente de intensidade I é proporcional a esta corrente. A lei se exprime pela equação $E = R.I$. A constante de proporcionalidade é a resistência do condutor.

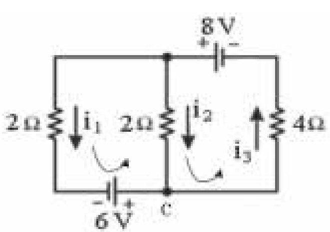
(2) Leis de Kirchoff:

(a) Lei das malhas: A soma das quedas de potencial elétrico ao longo de uma malha do circuito é igual à zero.

(b) Lei dos nós: A soma das correntes que chegam a um dado nó de um circuito é igual à soma das correntes que dele partem, ou seja, que a soma algébrica das correntes num determinado nó do circuito é nula.

Vamos determinar as correntes i_1, i_2 e i_3 dos circuitos elétricos abaixo:

Figura 2 – Circuito Elétrico (a)



Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 84, n. 5)

Resolução:

Aplicando a Lei de Ohm e as leis de Kirchoff, temos:

Nó C: $i_1 + i_2 = i_3$
Malha α: $2i_2 - 2i_1 + 6 = 0$
Malha β: $-2i_2 - 4i_3 + 8 = 0$

Assim, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 1i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ -2i_1 + 2i_2 = -6 \\ -2i_2 - 4i_3 = -8 \end{cases}$$

Do sistema acima podemos escrever a matriz abaixo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & -4 & -8 \end{array}\right) \to L_2 = L_2 + 2L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & -4 & -8 \end{array}\right) \to \frac{L_2}{4}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -2 & -4 & -8 \end{array}\right) \to L_3 = L_3 + 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -5 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to L_1 = L_1 - L_2 \\ \to L_2 = L_2 - \frac{1}{10}L_3 \\ \to -\frac{L_3}{5} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \end{array}\right) \rightarrow L_1 = L_1 + \frac{1}{2}L_3$$

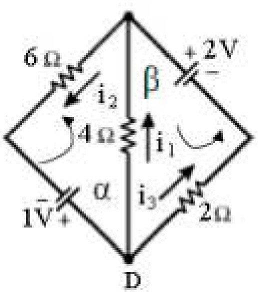
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \end{array}\right) \quad (1.5)$$

Da matriz (1.5), podemos escrever:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{13}{5}\,\text{A} \\ i_2 = -\frac{2}{5}\,\text{A} \\ i_3 = \frac{11}{5}\,\text{A} \end{cases}$$

Logo, $i_1 = \frac{13}{5}\,\text{A},\ i_2 = -\frac{2}{5}\,\text{A},\ i_3 = \frac{11}{5}\,\text{A}$. Como i_2 é negativo, o sentido da corrente é oposto do indicado na figura.

Figura 3 – Circuito Elétrico (b)



Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 84, n. 6)

Resolução:

Aplicando a Lei de Ohm e as leis de Kirchoff, temos:

Nó D: $i_1 + i_3 = i_2$
Malha α: $-4i_1 - 6i_2 + 1 = 0$
Malha β: $4i_1 + 2i_3 + 2 = 0$

Assim, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ -4i_1 - 6i_2 = -1 \\ 4i_1 + 2i_3 = -2 \end{cases}$$

Do sistema acima podemos escrever a matriz abaixo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \to L_2 = L_2 + 4L_1 \\ \to L_3 = L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right) \to -\frac{L_2}{10}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to L_{1=}L_1 + L_2 \\ \\ \to L_{3=}L_3 - 4L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{12}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \to -\frac{5}{2}L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to L_1 = L_1 - \frac{3}{2}L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \quad (1.6)$$

Da matriz (1.6), podemos escrever:

$$\begin{cases} i_1 = -\frac{7}{2}\ \text{A} \\ i_2 = \frac{5}{2}\ \text{A} \\ i_3 = 6\ \text{A} \end{cases}$$

Logo, $i_1 = -\frac{7}{2}$ A, $i_2 = \frac{5}{2}$ A, $i_3 = 6$ A . Como i_1 é negativo, o sentido da corrente é oposto do indicado na figura.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O intuito deste trabalho foi apresentar algumas das aplicações de sistemas lineares em situações concretas em diversas áreas, mostrando que a Matemática é uma ciência que não se limita a sua aplicação em uma única área.

Os livros didáticos abordam questões mais abstratas e de difícil percepção e analogia com o dia a dia. A abordagem de que nos utilizamos permite ao leitor visualizar a aplicação da disciplina de Álgebra em questões mais específicas em que se busca um resultado final concreto.

O uso da álgebra linear e as aplicações dos sistemas lineares podem e devem inspirar o desenvolvimento de novas soluções para outros problemas, não apenas limitando-se a álgebra propriamente dita, mas se utilizando da contribuição da matemática em outras situações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, R.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. Ed. Bookman, 10. ed., Porto Alegre, 2012.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra linear**. Ed. Harbra Ltda, 3. ed., São Paulo, 1980.

STEINBRUCH, A; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. Ed. Person Makron Books Editora LTDA, 2. ed., São Paulo, 1987.